ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2006. május 9.

MATEMATIKA SPANYOL NYELVEN MATEMÁTICAS

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA EXAMEN ESCRITO DE BACHILLERATO DE NIVEL SUPERIOR

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ GUÍA DE CORRECCIÓN Y EVALUACIÓN

OKTATÁSI MINISZTÉRIUM
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Información importante

Cuestiones formales para la corrección del examen:

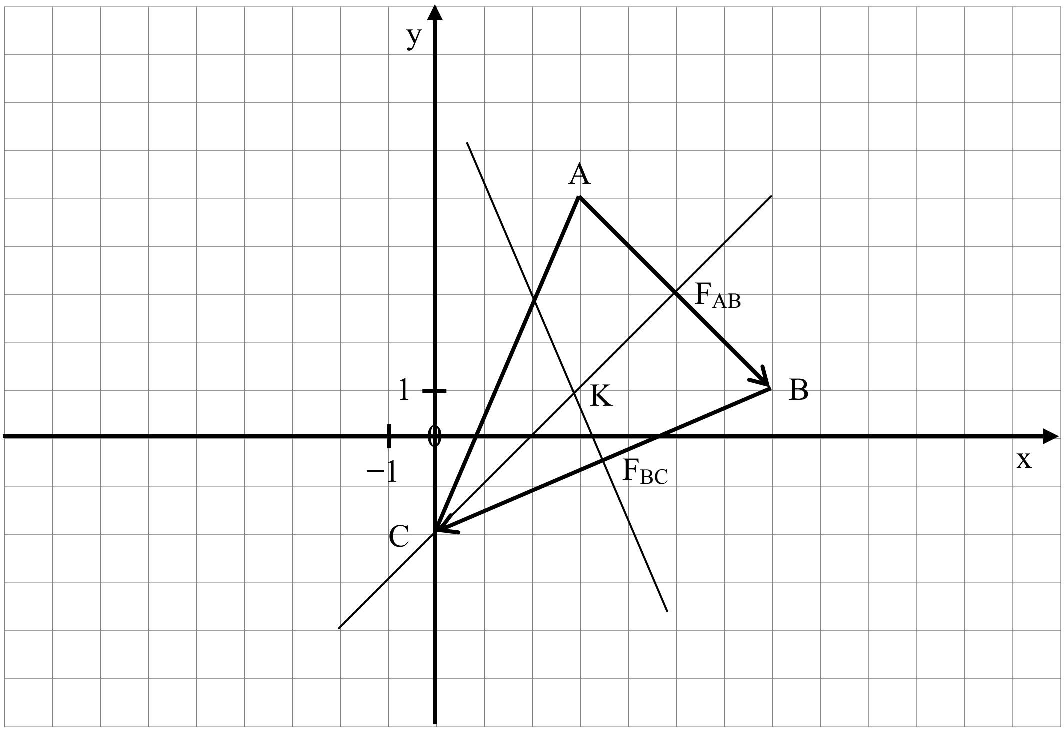
- El profesor tiene que corregir el examen con un **bolígrafo de diferente color** al utilizado por el alumno. El profesor indicará los errores, los pasos que faltan, etc, tal y como esté acostumbrado.
- En los recuadros grises de puntuación, el primero indica la máxima puntuación que se puede dar y el **recuadro** de al lado recoge los **puntos** que ha dado el profesor.
- **Si no hay errores en la resolución**, es suficiente escribir los puntos máximos en el recuadro correspondiente.
- Si hay errores o faltan pasos, indique, por favor, **los puntos correspondientes a las partes**.

Cuestiones de contenido:

- En el algunos problemas, les hemos ofrecido la puntuación correspondiente a varias soluciones. Si usted encuentra **otra solución**, busque, por favor, las partes equivalentes de las soluciones que muestra la guía y reparta los puntos según dichas partes.
- **Se pueden dividir** los puntos que la guía recomienda para indicar distintos pasos de una parte. Pero, en cualquier caso, los puntos que se den siempre serán enteros.
- Si los pasos y la resolución son correctos, se puede dar la máxima puntuación incluso si **las explicaciones no son tan amplias** como las que aparecen en la guía.
- Si el estudiante **comete un error de cálculo o de precisión**, no recibirá los puntos correspondientes a esta parte. Si al arrastrar este error, el resto de los pasos realizados son correctos y no cambia el sentido del problema, entonces se puntuarán el resto de los pasos.
- En caso de **un error de aplicación teórica**, dentro de un razonamiento en la resolución (los razonamientos distintos aparecen separados con una línea doble en la guía), no se pueden dar puntos ni por los pasos matemáticamente correctos hechos tras cometer el error. Pero si en el siguiente razonamiento, se sigue trabajando bien, a pesar del resultado incorrecto causado por dicho error, se darán los puntos máximos para las siguientes partes de la resolución del problema si no ha cambiado el sentido del problema.
- Si en la guía, **una unidad de medida** está entre paréntesis, la solución será correcta aunque no se escriba dicha unidad.
- Si el alumno escribe varios intentos par resolver un ejercicio, **sólo se puntuará uno de ellos**, el que tenga más puntuación.
- **No se pueden dar puntos extra** que excedan los puntos máximos que se pueden dar para el problema o una parte de él.
- **No se restan puntos** si aparecen errores en algún paso o en partes de la resolución que el alumno no utiliza después para resolver el ejercicio.
- **De los cinco problemas propuestos en la II.parte del examen sólo se pueden puntuar cuatro**. Probablemente el estudiante habrá indicado el número del problema eliminado, el que no puntuará, en el cuadrado correspondiente. Si el alumno hubiera resuelto este problema no habría que corregirlo. Si no queda claro cuál es el ejercicio que el alumno examinado no desea que se le corrija, entonces automáticamente, según el orden en que se dan los problemas, no se corregirá el último.

I.

1. a)



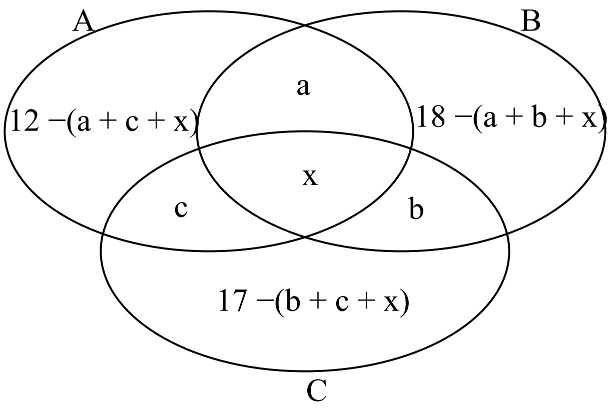
El vértice C del triángulo es el punto de corte de la mediatriz del lado AB y el eje Y Punto medio de AB : $F_{AB}(5;3)$.	1 punto	
Uno de los vectores normales de la mediatriz de AB: $\overrightarrow{AB}(4;-4)$.	1 punto	
La ecuación de la mediatriz de AB : $x-y=2$.	1 punto	
El vértice opuesto a la base AB : $C(0;-2)$.	1 punto	*Si el alumno examinado deduce las coordenadas del vértice C a partir de la gráfica, sin hacer cálculos, entonces se le puede dar como máximo 2 puntos de los 4 puntos que suman en total esta parte.*
Total:	**4 puntos**	

b)		
El centro de la circunferencia circunscrita es el punto de corte de la mediatriz de la base AB y de la mediatriz de cualquiera de los lados oblicuos.	1 punto	*Si el alumno no escribe explícitamente esta explicación pero se puede observar en los pasos que sigue en el desarrollo de la resolución, entonces también recibirá este punto.*
Punto medio del lado BC: $F_{BC}\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$.	1 punto	
Uno de los vectores normales de la mediatriz de BC: $\overrightarrow{CB}(7;3)$.	1 punto	
La ecuación de la mediatriz de BC: $7x+3y=23$.	1 punto	
Las ecuaciones de las mediatrices de los lados AB y BC forman un sistema de ecuaciones que tiene por solución $x=2{,}9$; $y=0{,}9$. Así el centro de la circunferencia circunscrita: $K(2{,}9;\ 0{,}9)$.	2 puntos	
El cuadrado del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo: $r^2=KC^2=2\cdot 2{,}9^2=16{,}82$.	1 punto	
Ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo es $(x-2{,}9)^2+(y-0{,}9)^2=16{,}82$.	1 punto	
Total:	**8 puntos**	

2.		
Llamamos *a* a la longitud de las aristas del cubo rojo y *b* a la longitud de las aristas del cubo azul . El área total del cubo rojo es $6a^2$, y la del cubo azul $6b^2$.	2 puntos	
Por los requisitos del ejercicio: $6a^2 = \frac{3}{4} \cdot 6b^2$.	3 puntos	
Del resultado anterior y teniendo en cuenta que $a > 0$ y $b > 0$, se deduce que $a = \frac{\sqrt{3}}{2} b$	2 puntos	
Así el volumen del cubo rojo se expresa en función del volumen del cubo azul: $a^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8} b^3$.	3 puntos	
Como $\frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0,65$, entonces el volumen del cubo rojo es $\approx 65\%$ del volumen del cubo azul.	1 punto	
Es decir, el volumen del cubo rojo es aproximadamente un 35% menor que el volumen del cubo azul.	1 punto	
Total:	**12 puntos**	

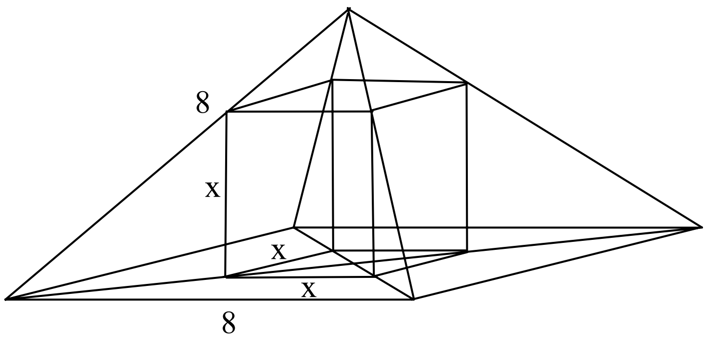
3. a)		
Si consideramos x_1, x_2 las soluciones de la ecuación $x^2 - x + p = 0$, entonces $x_1 + 1, x_2 + 1$ serán las soluciones de la ecuación $x^2 + px - 1 = 0$.	2 puntos	*También se consiguen estos puntos si el alumno escribe las soluciones en función del parámetro utilizando la fórmula de resolución de las ecuaciones de segundo grado.*
Escribimos la suma de las soluciones en el caso de ambas ecuaciones aplicando las fórmulas de Viéte: $x_1 + x_2 = 1$ y $(x_1 + 1) + (x_2 + 1) = -p$.	3 puntos	*Si las soluciones se expresan mediante la fórmula de resolución y se emparejan correctamente, también se podrán dar estos 3 puntos.*
De éstas se obtiene que $p = -3$.	3 puntos	
Sustituyendo el valor de $p = -3$ en ambas ecuaciones se obtienen soluciones reales.	1 punto	*Mediante el estudio del discriminante también se puede conseguir este punto.*
Total:	**9 puntos**	
b)		
El discriminante de la ecuación $x^2 - x + 5 = 0$ es negativo y por tanto no tiene soluciones reales.	2 puntos	
Las soluciones de la ecuación $x^2 + 5x - 1 = 0$ son $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} (\approx 0{,}19)$; $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} (\approx -5{,}19)$.	2 puntos	
Total:	**4 puntos**	

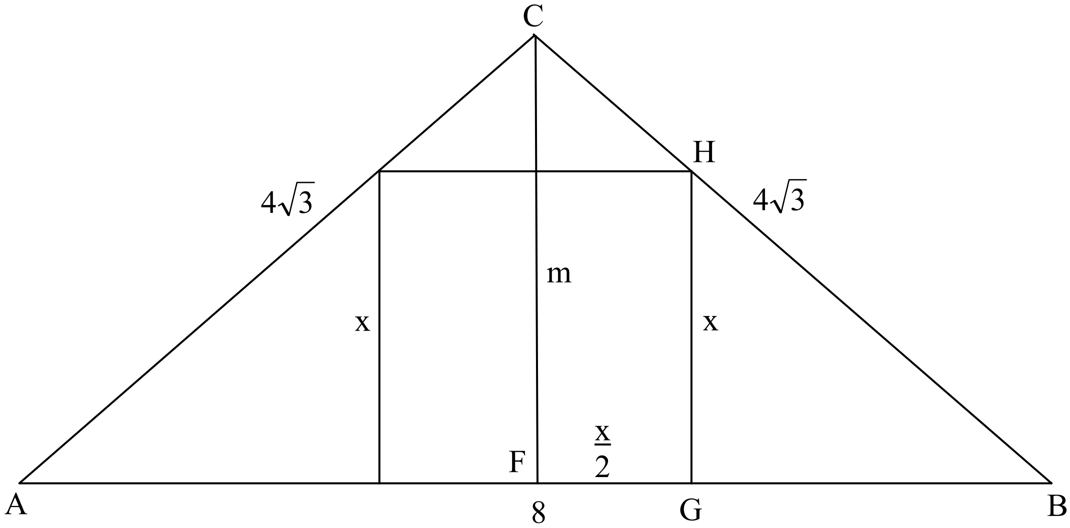
4. a) (1. método)		
Denotamos con A, B y C los conjuntos formados por los científicos que han publicado estudios sobre el uso de los ordenadores en los campos de investigación, educación y comunicación, respectivamente. Según los requisitos del problema y utilizando la notación anterior se verifica : $\|A\| = 12,\quad \|B\| = 18,\quad \|C\| = 17,\quad \|A \cup B \cup C\| = 30.$	1 punto	
$\|A \cap B\| + \|B \cap C\| + \|C \cap A\| - 3 \cdot \|A \cap B \cap C\| = 7.$	2 puntos	
Aplicando la fórmula correspondiente a la criba de Eratóstenes : $30 = \|A \cup B \cup C\| =$ $= \|A\| + \|B\| + \|C\| - \|A \cap B\| - \|B \cap C\| - \|C \cap A\| + \|A \cap B \cap C\| =$ $= 12 + 18 + 17 - 7 - 2 \cdot \|A \cap B \cap C\|.$	3 puntos	
De lo que se deduce que $\|A \cap B \cap C\| = 5$.	2 puntos	
Así la probabilidad buscada: $P = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.	2 puntos	
Total:	**10 puntos**	

a) (2. método)		
	3 puntos	
Teniendo en cuenta los requisitos del problema: (1) $a+b+c=7$.	1 punto	
(2) $x+a+b+c+12-(a+c+x)+18-(a+b+x)+$ $+17-(b+c+x)=30$	2 puntos	
Agrupamos en la parte izquierda de (2) y nos queda: $47-2x-(a+b+c)=30$.	1 punto	
Sustituyendo el resultado de (1) y despejando el valor de x se obtiene que $x=5$.	1 punto	
Probabilidad buscada: $P=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$.	2 puntos	
Total:	**10 puntos**	
b)		
5 científicos han publicado sobre los tres temas, 7 de los científicos sobre cualquiera de los dos temas, así hay 12 que han publicado en por lo menos dos temas.	2 puntos	
Por tanto el número de los llamados especialistas: $30-12=18$.	2 puntos	
Total:	**4 puntos**	

II.

5. a)



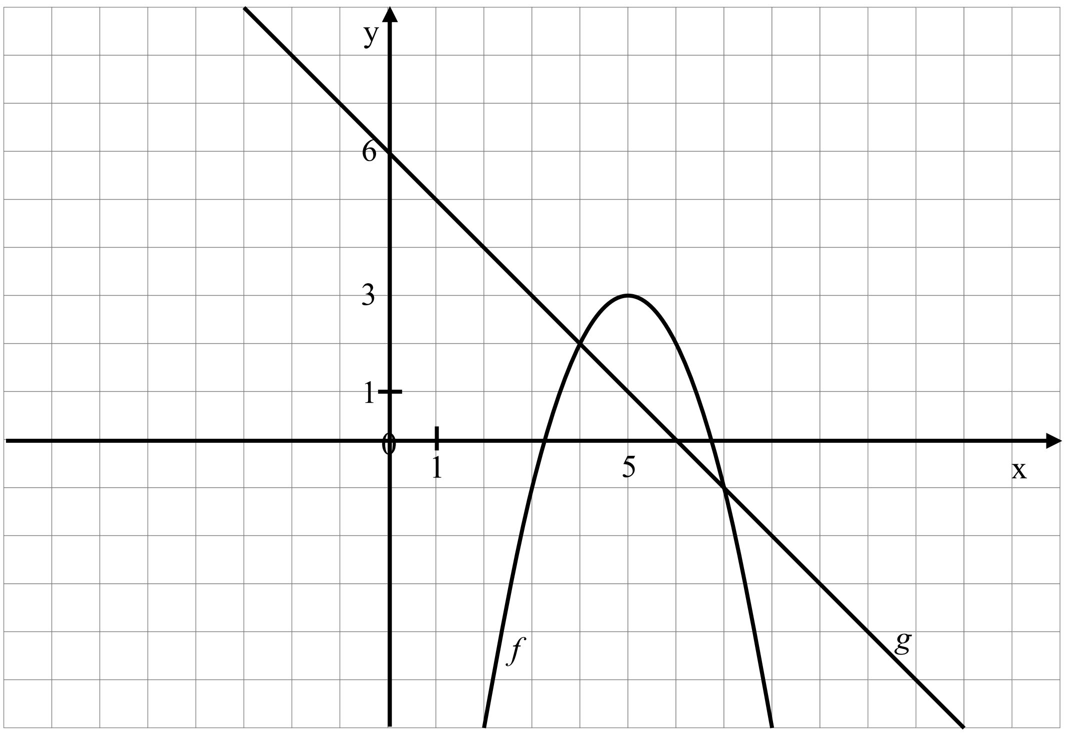


Para determinar las aristas de la sala que se encuentra en el interior del tejado, cortamos la pirámide con un plano perpendicular a su base que contiene el vértice de la pirámide y los puntos medios de dos aristas opuestas de la base de dicha pirámide.	2 puntos	*En caso de que estas relaciones en el espacio (sección plana con la que cortamos el cuerpo) queden reflejadas de manera clara en el dibujo, también se podrán dar estos 2 puntos.*
Se trata de un triángulo isósceles cuya base mide 8 y sus lados oblicuos miden $4\sqrt{3}$ metros.	1 punto	
La altura correspondiente a la base de este triángulo se calcula aplicando el teorema de Pitágoras y mide $m = 4\sqrt{2}$ (m).	1 punto	
Utilizando la notación que aparece en la sección plana del dibujo, se tiene que el triángulo rectángulo *CFB* es semejante al triángulo rectángulo *HGB,*	1 punto	
ya que un ángulo de *FBC* es un ángulo agudo común.	1 punto	

Si llamamos x a la longitud de las aristas del cubo (que en la sección plana correspondería a los lados del cuadrado inscrito en el triángulo), entonces por la semejanza se verifica que $\dfrac{x}{4-\dfrac{x}{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$,	1 punto	
de donde $x=\dfrac{8\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\approx 3{,}3\,(\mathrm{m})$.	1 punto	
Área del suelo de la sala: $T=x^2=\dfrac{64}{3+2\sqrt{2}}\approx 11\,\mathrm{m}^2$.	1 punto	
Total:	**9 puntos**	
b)		
Teniendo en cuenta un resultado anterior, la altura de la pirámide es $m=4\sqrt{2}$.	1 punto	
Así el volumen del tejado (pirámide) es $V_t=\dfrac{8^2\cdot 4\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{m}^3=\dfrac{256\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{m}^3\approx 120{,}68\,\mathrm{m}^3$.	2 puntos	*También se consiguen los puntos correspondientes si no se indican las aproximaciones de los resultados.*
Volumen del cubo: $V_c=\left(\dfrac{8\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^3\mathrm{m}^3=\dfrac{1024\sqrt{2}}{\left(2+\sqrt{2}\right)^3}\,\mathrm{m}^3\approx 36{,}38\,\mathrm{m}^3$.	2 puntos	
La razón entre los volúmenes: $\dfrac{V_c}{V_t}=\dfrac{12}{\left(2+\sqrt{2}\right)^3}\approx 0{,}3015$.	1 punto	
La sala ocupa aproximadamente el 30% del espacio del tejado.	1 punto	
Total:	**7 puntos**	

6. a)		
Ecuación a resolver: $-x^2+10x-22=-x+6$. Tras la ordenación y agrupación de los términos: $x^2-11x+28=0$.	1 punto	
Soluciones: $x_1=4, x_2=7$.	2 puntos	
Total:	**3 puntos**	
b)		
Las pendientes de las rectas tangentes trazadas por los puntos de corte de ambas: $m_1=f'(x_1)$, y $m_2=f'(x_2)$, $f'(x)=-2x+10$.	1 punto	
Así $m_1=f'(4)=2$ y $m_2=f'(7)=-4$.	2 puntos	
Los puntos donde se cortan las dos gráficas son $M_1(4;2)$, y $M_2(7;-1)$.	2 puntos	
Ecuaciones de las rectas tangentes: $e_1: \ y-2=2(x-4)$, o expresada de otra forma $y=2x-6$,	1 punto	*Si las ecuaciones de las tangentes se escriben correctamente utilizando otra forma cualquiera, se darán los puntos correspondientes.*
$e_2: \ y+1=-4(x-7)$, o expresada de otra forma $y=-4x+27$.	1 punto	
Total:	**7 puntos**	

c)



Representación gráfica de f y g.	1 punto	*Si el alumno representa las funciones de manera incorrecta pero hace bien los cálculos con datos erróneos (toma mal el intervalo) podrá recibir como máximo 4 puntos. Si el alumno calcula las integrales correspondientes por separado y luego las resta o no calcula la integral de la función g sino que fijándose en el dibujo resta a la integral de f el área del triángulo rectángulo isósceles correspondiente, entonces también recibirá la puntuación adecuada.*
Área de la región del plano buscada: $T=\int_4^6 f(x)dx-\int_4^6 g(x)dx=\int_4^6 (f(x)-g(x))dx$.	1 punto	
Como $f(x)-g(x)=-x^2+11x-28$, entonces $T=\int_4^6 \left(-x^2+11x-28\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+11\frac{x^2}{2}-28x\right]_4^6=$	2 puntos	
$=\left(-\frac{6^3}{3}+11\cdot\frac{6^2}{2}-28\cdot 6\right)-\left(-\frac{4^3}{3}+11\cdot\frac{4^2}{2}-28\cdot 4\right)=\frac{10}{3}$.	2 puntos	
Total:	**6 puntos**	

7. a)		
Sea s_1 la longitud del trayecto en km de Szeged a Cegléd, s_2 la distancia en km de Cegléd a Budapest, y sea v la velocidad media original del tren en km/h. El tiempo en horas del recorrido del tren el lunes: $\frac{s_1}{v}+\frac{3s_2}{v}$.	2 puntos	*Se puede considerar como solución completa sin usar fórmulas pero con argumentos concisos y precisos: La diferencia de 30 minutos en los tiempos del recorrido en el tramo de 19 km, se debe a que la velocidad durante el fin de semana es el doble. Por tanto, la velocidad del tren es dos veces 19/0,5, por eso: 76 km/h.*
La duración del trayecto en horas durante el fin de semana: $\frac{s_1+19}{v}+\frac{3(s_2-19)}{v}$.	3 puntos	
Si consideramos la diferencia entre los dos tiempos del recorrido del tren: $\left(\frac{s_1}{v}+\frac{3s_2}{v}\right)-\left(\frac{s_1+19}{v}+\frac{3(s_2-19)}{v}\right)=\frac{1}{2}$.	3puntos	
Se resuelve la ecuación y obtenemos que la velocidad media original del tren es $v=76$ km/h.	2 puntos	
Total:	**10 puntos**	

b)

Tipo de billete	Precio del billete normal	Descuento del 20%	Descuento del 33%	Descuento del 50%	Descuento del 67,5%	Descuento del 75%	Descuento del 90%	Descuento del 95%	Gratis
Número de pasajeros	84	18	44	110	11	35	31	29	38
Precio del billete (Ft)	**2000**	**1600**	**1340**	**1000**	**650**	**500**	**200**	**100**	**0**

Completar los datos que faltan en la tabla.	2 puntos	*Si hay errores en el cálculo de los precios de los billetes, como máximo se permiten cuatro, entonces se podrá dar 1 punto. Si hay más de cuatro errores no se darán puntos.*

La media de los precios en forintos es

$$\frac{84\cdot 2000+18\cdot 1600+44\cdot 1340+110\cdot 1000+11\cdot 650+35\cdot 500+31\cdot 200+29\cdot 100+38\cdot 0}{400}=$$

$=\frac{399510}{400}=998{,}775(\approx 999\text{Ft, o también } 1000\text{Ft})$.	2 puntos	*Si el alumno ha cometido algún error en el cálculo de los precios de los billetes, pero con estos datos aplica correctamente el cálculo de la media, entonces también recibirá los dos puntos.*
El resultado es aproximadamente el 50% del precio completo, así la media de los precios se corresponde con el descuento de aproximadamente el 50%.	2 puntos	*También se darán los 2 puntos, si teniendo en cuenta los errores en los datos, el alumno teóricamente realiza bien los cálculos o si expresa el resultado redondeado de otra forma.*
Total:	**6 puntos**	

8. a)		
Tenemos que $\overline{a}$, $\overline{ab}$, $\overline{bba}$ son tres términos consecutivos de una progresión aritmética, así $\overline{bba}-\overline{ab}=\overline{ab}-\overline{a}$.	1 punto	
Escribiendo los números con sus valores correspondientes: $(110b+a)-(10a+b)=(10a+b)-a$,	1 punto	
y agrupando los términos semejantes obtenemos que $a=6b$.	1 punto	
Como a y b son unidades del sistema numérico decimal, entonces $a=6, b=1$.	2 puntos	
Así los tres números son 6; 61; 116, y la diferencia 55.	1 punto	
La suma de los cien primeros términos: $S_{100}=\frac{100}{2}(2\cdot 6+99\cdot 55)=272850$.	1 punto	
Total:	**7 puntos**	
b)		
Sea a el primer término de la progresión geométrica y q su cociente. Si $q=1$, entonces se trata de una progresión geométrica constante, así las sumas correspondientes son iguales. Los tres números iguales constituyen otros tres términos consecutivos de otra progresión geométrica.	1 punto	
Si $q\neq 1$, entonces la suma de los n primeros términos: $S_n^{(1)}=a\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$.	1 punto	
La suma de los n segundos términos: $S_n^{(2)}=aq^n\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$.	2 puntos	
La suma de los n terceros términos: $S_n^{(3)}=aq^{2n}\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$.	2 puntos	
Estas sumas, en este orden, serían los tres términos consecutivos de una progresión geométrica si se verificara que $\left(S_n^{(2)}\right)^2=S_n^{(1)}\cdot S_n^{(3)}$.	1 punto	
Lo cual es realmente cierto ya que $S_n^{(1)}\cdot S_n^{(3)}=a^2q^{2n}\cdot\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)^2=\left(aq^n\cdot\frac{q^n-1}{q-1}\right)^2=\left(S_n^{(2)}\right)^2$.	2 puntos	
Total:	**9 puntos**	*Los últimos tres puntos también pueden darse por cualquier otra justificación llevada a cabo correctamente.*

9. a)		
Si los primeros números son a y b ($a < b$), entonces el tercer número será $a+b$ y el cuarto $2(a+b)$.	1 punto	
Por los requisitos del ejercicio se tiene que verificar que $2(a+b) \le 40$, o lo que es lo mismo: $a+b \le 20$.	1 punto	
Como $a < b$, entonces $a \le 9$, y así el menor de los números podrá valer, como máximo, 9 .	2 puntos	
Total:	**4 puntos**	
b)		
Los dos grupos de cuatro números posibles son:	2 puntos	
9, 10, 19, 38;	1 punto	
9, 11, 20, 40.	1 punto	
Total:	**4 puntos**	
c)		
De acuerdo con las reglas que se ha impuesto András para rellenar los boletos de la lotería, estudiamos todas las posibilidades para marcar el primer número. Primer número: 1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 punto	
Número total de boletos que puede rellenar con el correspondiente primer número: 18 16 14 12 10 8 6 4 2.	2 puntos	
Así el número total de boletos distintos que puede completar es: $2+4+...+18=90$.	1 punto	
El número de grupos de cuatro números que se pueden formar de entre los 40 primeros números enteros positivos: $\binom{40}{4}=91390$.	2 puntos	
Probabilidad total: $P=\frac{90}{91390}\approx 9{,}85\cdot 10^{-4}$.	2 puntos	
Total:	**8 puntos**	