ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2006. május 9.

MATEMATIKA
NÉMET NYELVEN
MATHEMATIK

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA
HÖHERES NIVEAU ABITUR

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ
ANLEITUNG ZUR BEWERTUNG UND KORREKTUR

OKTATÁSI MINISZTÉRIUM
MINISTERIUM FÜR BILDUNG

Wichtige Hinweise

Formvorschriften:

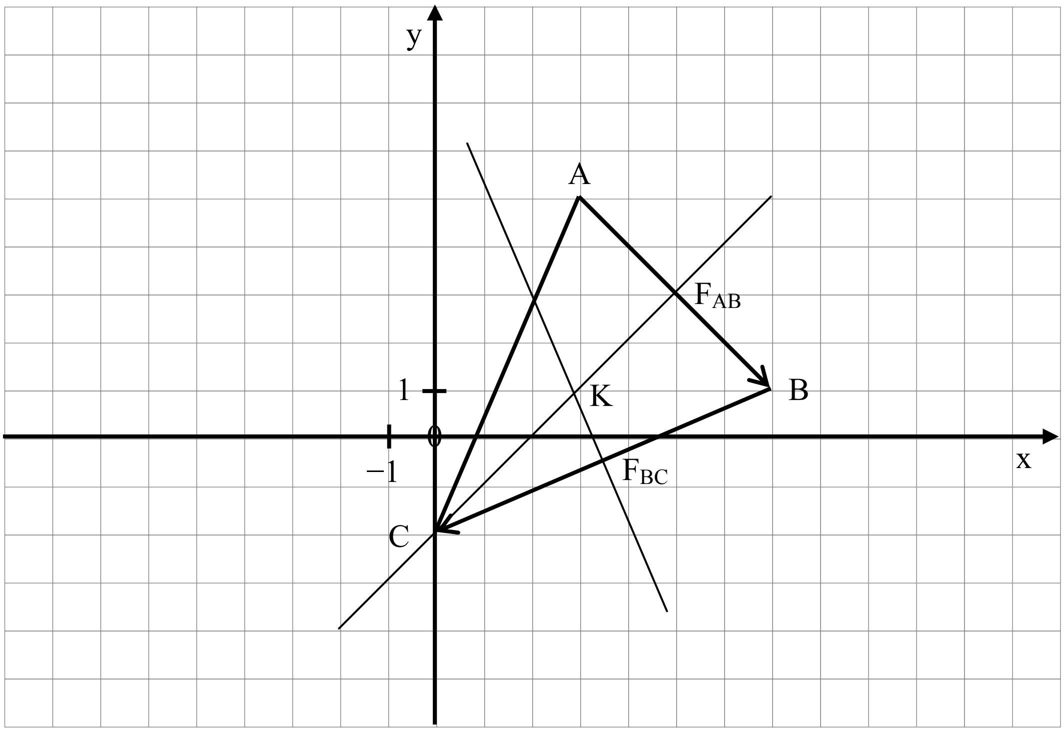
- Die Arbeit ist mit einem **andersfarbigen Stift**, als der Abiturient ihn benutzt hat, zu korrigieren. Die Fehler und die fehlenden Schritte sind wie üblich zu markieren.
- In den Kästchen neben den Aufgaben steht zuerst die maximale Punktzahl. Der Korrektor trägt die von ihm gegebene **Punktzahl in das zweite Kästchen** ein.
- Bei **einwandfreier Lösung** kann ohne Angabe von Teilpunkten die maximale Punktzahl eingetragen werden.
- Bei fehlerhaften oder mangelhaften Lösungen geben Sie bitte auch die **Teilpunkte** für die richtigen Schritte an.

Inhaltliche Fragen:

- Bei einigen Aufgaben sind verschiedene Lösungswege angegeben. Wenn eine von diesen **unterschiedlichen Lösung**en vorkommt, suchen Sie die gleichwertigen Teile und verteilen die Punkte entsprechend.
- Die vorgeschriebenen Punktzahlen lassen sich weiter **zerlegen**, dürfen aber nur als ganze Punkte vergeben werden.
- Offensichtlich gute Lösungswege und Endergebnisse können auch dann mit maximalen Punktzahlen bewertet werden, wenn sie **weniger ausführlich** als die Musterlösung in der Anweisung beschrieben sind.
- Wenn der Schüler einen **Rechenfehler** macht oder ungenau wird, aber damit das zu lösende Problem nicht wesentlich verändert wird, bekommt er nur für den Teil keinen Punkt, wo der Fehler lag. Wenn er mit falschem Teilergebnis, aber mit richtigem Gedankengang weiterrechnet, sind die weiteren Teilpunkte zu gewähren.
- Begeht der Schüler einen **theoretischen Fehler**, so bekommt er innerhalb einer Gedankeneinheit auch für die formell richtigen mathematischen Schritte keinen Punkt. Wenn der Schüler in einer folgenden Teilaufgabe oder Gedankeneinheit, wo durch diesen Fehler das lösende Problem nicht wesentlich verändert wurde, mit diesem falschen Ergebnis als Ausgangswert richtig weiterrechnet, bekommt er die maximale Punktzahl für diesen neuen Teil.
- Falls in der Musterlösung die **Einheit** bei dem Ergebnis in Klammern steht, ist die Lösung auch ohne diese Einheit als vollständig zu bewerten.
- Bei mehreren Lösungsversuchen für eine Aufgabe **ist nur eine zu bewerten** (die, mit der größeren Punktzahl).
- **Zusatzpunkte** (mehr Punkte als die vorgeschriebene maximale Punktzahl für die Aufgabe) **sind nicht zugelassen**.
- Es gibt **keinen Punktabzug** für Berechnungen und Schritte, die zwar falsch sind, aber eigentlich vom Schüler bei der Lösung der Aufgabe nicht verwendet werden.
- **Im Teil II sind aus den 5 Aufgaben nur Lösungen von 4 zu bewerten**. Der Abiturient hat – vermutlich – die Nummer der Aufgabe, die nicht bewertet werden soll, in das entsprechende Kästchen eingetragen. Dementsprechend wird die eventuell vorhandene Lösung für diese Aufgabe nicht korrigiert. Wenn die abgewählte Aufgabe nicht eindeutig feststeht, dann ist die nicht zu bewertende Aufgabe automatisch die letzte Aufgabe der vorgegebenen Aufgabenreihe.

I.

1. a)



Der Eckpunkt C wird durch den Schnittpunkt der Mittelsenkrechte der Strecke AB und der y –Achse bestimmt. Der Halbierungspunkt der Strecke AB: $F_{AB}(5;3)$.	1 Punkt	
Ein Normalvektor der Mittelsenkrechte von AB ist: $\overrightarrow{AB}(4;-4)$.	1 Punkt	
Die Gleichung der Mittelsenkrechte von AB: $x-y=2$.	1 Punkt	
Der Basis AB gegenüberliegender Eckpunkt: $C(0;-2)$.	1 Punkt	*Wenn die Koordinaten von C nicht berechnet wurden, sondern von der Abbildung abgelesen wurden sind höchstens von die 4 Punkte 2 zu geben!*
Insgesamt:	**4 Punkte**	

b)

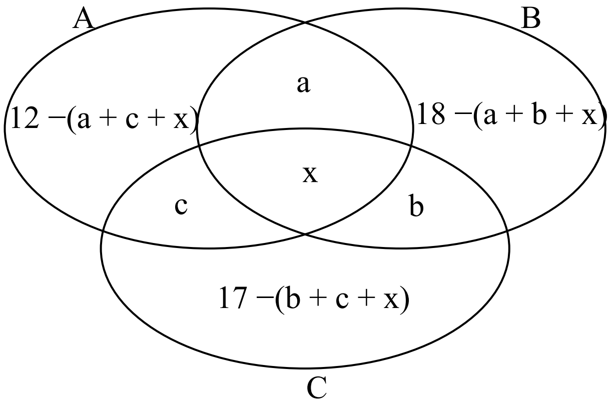
Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechte von AB und der Mittelsenkrechte von einem der beiden Schenkel.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch dann zu geben, wenn dieser Zusammenhang durch den Rechenweg klar wird.*

Der Halbierungspunkt der Strecke BC : $F_{BC}\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$.	1 Punkt	
Ein Normalvektor der Mittelsenkrechte von BC ist: $\overrightarrow{CB}(7;3)$.	1 Punkt	
Die Gleichung der Mittelsenkrechte von BC: $7x+3y=23$.	1 Punkt	
Die Lösung der Gleichungssystem aus den Gleichungen der Mittelsenkrechten ist: $x=2{,}9$; $y=0{,}9$. Der Mittelpunkt des Umkreises: $K(2{,}9;\ 0{,}9)$.	2 Punkte	
Das Quadrat des Umkreisradius: $r^2=KC^2=2\cdot 2{,}9^2=16{,}82$.	1 Punkt	
Die Gleichung des Umkreises: $(x-2{,}9)^2+(y-0{,}9)^2=16{,}82$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**8 Punkte**	

2.		
Der rote Würfel hat die Kantenlänge a, der blaue Würfel hat die Kantenlänge b. Der Flächeninhalt des roten Würfels ist $6a^2$ und die des blauen Würfels $6b^2$.	2 Punkte	
Nach der Bedingung: $6a^2=\frac{3}{4}\cdot 6b^2$.	3 Punkte	
Weil $a>0$ und $b>0$ ergibt sich: $a=\frac{\sqrt{3}}{2}b$.	2 Punkte	
Das Volumen der roten Würfel mit Hilfe des Volumens der blauen Würfels: $a^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}b^3$.	3 Punkte	
Weil $\frac{3\sqrt{3}}{8}\approx 0{,}65$, deshalb ist das Volumen des roten Würfels $\approx 65\%$ des Volumen des blauen Würfels.	1 Punkt	
Also ist das Volumen der roten Würfel um ca. 35% kleiner als das Volumen der blauen Würfel.	1 Punkt	
Insgesamt:	**12 Punkte**	

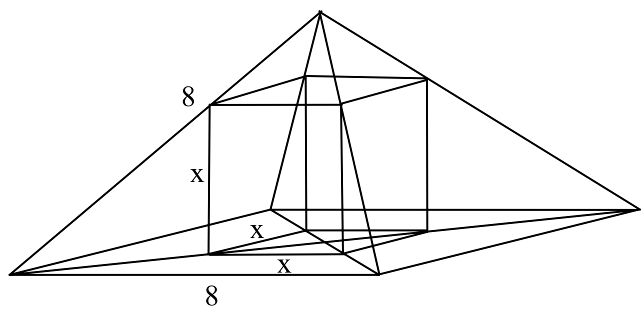
3. a)		
Wenn x_1, x_2 die Lösungen der Gleichung $x^2 - x + p = 0$ sind, dann sind $x_1 + 1, x_2 + 1$ die Lösungen der Gleichung $x^2 + px - 1 = 0$.	2 Punkte	*Diese Punktzahl ist auch dann zu geben, wenn der Kandidat die Lösungen mit der Lösungsformel, aber mit Parameter p aufschreibt.*
Bei beiden Gleichungen der Satz von Viéta - für die Summe der Lösungen: $x_1 + x_2 = 1$ és $(x_1 + 1) + (x_2 + 1) = -p$.	3 Punkte	*Die 3 Punkte sind auch für die richtigen Paare der mit der Lösungsformel erhaltenen Lösungen der Gleichungen.*
Davon ergibt sich $p = -3$.	3 Punkte	
Für $p = -3$ haben beide Gleichungen reelle Lösungen.	1 Punkt	*Dieser Punkt ist auch für die Betrachtung der Diskriminante zu geben.*
Insgesamt:	**9 Punkte**	
b)		
Die Diskriminante der Gleichung $x^2 - x + 5 = 0$ ist negativ, deshalb hat die Gleichung keine reellen Lösungen.	2 Punkte	
Die Lösungen der Gleichung $x^2 + 5x - 1 = 0$ sind: $x_1 = \frac{-5+\sqrt{29}}{2} (\approx 0{,}19)$; $x_2 = \frac{-5-\sqrt{29}}{2} (\approx -5{,}19)$.	2 Punkte	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

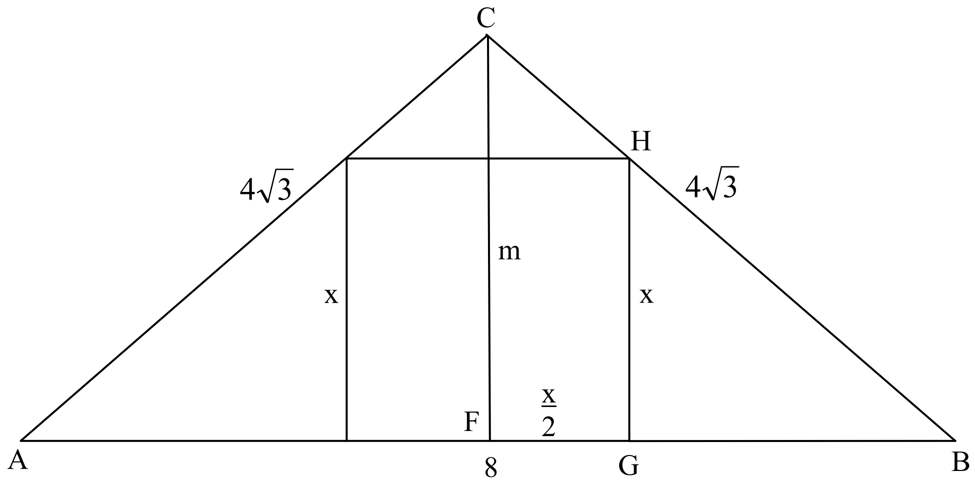
4. a) (1. Lösung)		
A, B und C soll die Menge der Wissenschaftler bezeichnen, die über die Rolle der Computer bei der Forschung, der Schulung und der Kommunikation Studien veröffentlicht haben. Die Bedingungen der Aufgabe mit diesen Bezeichnungen: $\lvert A\rvert = 12,\quad \lvert B\rvert = 18,\quad \lvert C\rvert = 17,\quad \lvert A \cup B \cup C\rvert = 30.$	1 Punkt	
$\lvert A \cap B\rvert + \lvert B \cap C\rvert + \lvert C \cap A\rvert - 3 \cdot \lvert A \cap B \cap C\rvert = 7.$	2 Punkte	
Nach Verwendung der Formel für das logische Sieb: $30 = \lvert A \cup B \cup C\rvert =$ $= \lvert A\rvert + \lvert B\rvert + \lvert C\rvert - \lvert A \cap B\rvert - \lvert B \cap C\rvert - \lvert C \cap A\rvert + \lvert A \cap B \cap C\rvert =$ $= 12 + 18 + 17 - 7 - 2 \cdot \lvert A \cap B \cap C\rvert.$	3 Punkte	
Daraus folgt $\lvert A \cap B \cap C\rvert = 5$.	2 Punkte	
Die gefragte Wahrscheinlichkeit ist: $P = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.	2 Punkte	
Insgesamt:	**10 Punkte**	

a) (2. Lösung)		
	3 Punkte	
Nach den Bedingungen: (1) $a+b+c=7$.	1 Punkt	
(2) $x+a+b+c+12-(a+c+x)+18-(a+b+x)+$ $+17-(b+c+x)=30$	2 Punkte	
Nach der Zusammenfassung auf der linke Seite der Gleichung (2): $47-2x-(a+b+c)=30$.	1 Punkt	
Nach dem Einsetzen von (1) ergibt sich $x=5$.	1 Punkt	
Die gefragte Wahrscheinlichkeit ist: $P=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$.	2 Punkte	
Insgesamt:	**10 Punkte**	
b)		
5 Wissenschaftler haben Studien in alle drei Themen, 7 in genau zwei Themen, also sind 12 die mindestens in zwei Studien veröffentlicht haben.	2 Punkte	
Also ist die Anzahl der Spezialisten $30-12=18$.	2 Punkte	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

II.

5. a)





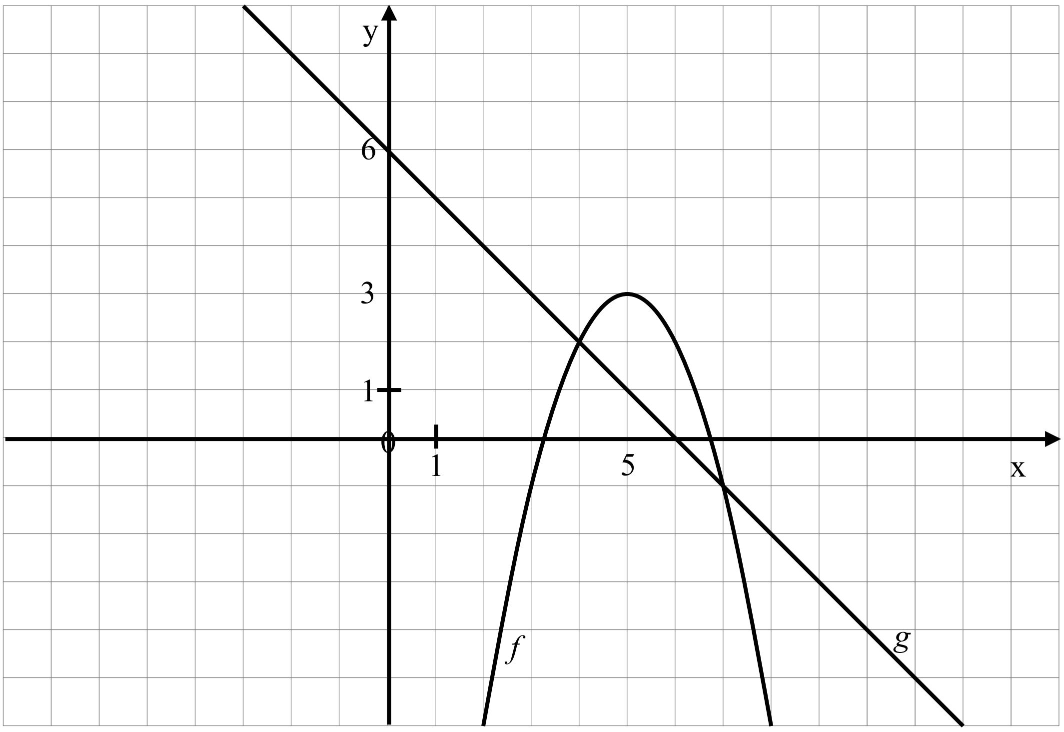
Nehmen wir einen ebenen Schnitt durch den Eckpunkt der Pyramide und durch zwei Seitenhalbierungspunkte der gegenüberliegenden Grundkanten der Pyramide, um die Seitenlänge des Dachraumes zu bestimmen.	2 Punkte	*Die zwei Punkte sind auch dann zu geben, wenn die richtige Vorstellung über die räumlichen Verhältnisse auf der Abbildung zu sehen ist.*
So ergibt sich ein gleichschenkliges Dreieck, mit den Seitenlängen: die Basis ist 8 m, die Schenkeln sind $4\sqrt{3}$ m lang.	1 Punkt	
Die zur Basis gehörende Höhe ergibt sich nach dem Satz von Pythagoras: $m = 4\sqrt{2}$ (m).	1 Punkt	
Mit den Bezeichnungen der Abbildung über den ebenen Schnitt sind *CFB* und *HGB* ähnliche rechtwinklige Dreiecke,	1 Punkt	
denn *FBC* ist ein gemeinsamer spitze Winkel der beiden Dreiecke.	1 Punkt	

Wenn x die Kantenlänge des Würfels bezeichnet (im ebenen Schnitt die Seitenlänge des Quadrates), dann ist nach dem Ähnlichkeit $\frac{x}{4-\frac{x}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$,	1 Punkt	
woher $x=\frac{8\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\approx 3{,}3\,(\mathrm{m})$.	1 Punkt	
Die Grundfläche des Dachraumes ist : $T=x^2=\frac{64}{3+2\sqrt{2}}\approx 11\,\mathrm{m}^2$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**9 Punkte**	
b)		
Die Höhe der Pyramide ist nach den vorherigen Berechnungen: $m=4\sqrt{2}$.	1 Punkt	
So ist das Volumen des Dachbodens (Pyramide): $V_t=\frac{8^2\cdot 4\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{m}^3=\frac{256\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{m}^3\approx 120{,}68\,\mathrm{m}^3$.	2 Punkte	*Die Punktzahlen sind auch ohne die Näherungswerte zu geben.*
Das Volumen des Würfels : $V_k=\left(\frac{8\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^3\mathrm{m}^3=\frac{1024\sqrt{2}}{\left(2+\sqrt{2}\right)^3}\,\mathrm{m}^3\approx 36{,}38\,\mathrm{m}^3$.	2 Punkte	
Das Verhältnis der Volumina : $\frac{V_k}{V_t}=\frac{12}{\left(2+\sqrt{2}\right)^3}\approx 0{,}3015$.	1 Punkt	
Der Raum füllt ungefähr 30% des Dachbodenluftraumes aus.	1 Punkt	
Insgesamt:	**7 Punkte**	

6. a)		
Die Gleichung, die man lösen soll: $-x^2+10x-22=-x+6$. Gleich 0 gesetzt: $x^2-11x+28=0$.	1 Punkt	
Die Lösungen: $x_1=4, x_2=7$.	2 Punkte	
Insgesamt:	**3 Punkte**	
b)		
Die Steigung der Tangenten bei den Schnittpunkten: $m_1=f'(x_1)$, bzw. $m_2=f'(x_2)$, $f'(x)=-2x+10$.	1 Punkt	
Also $m_1=f'(4)=2$ und $m_2=f'(7)=-4$.	2 Punkte	
Die Schnittpunkte der Graphen: $M_1(4;2)$, bzw. $M_2(7;-1)$.	2 Punkte	

Die Gleichung der zwei Tangenten: $e_1:\ y-2=2(x-4)$, oder im einen anderen Form $y=2x-6$,	1 Punkt	*Für die richtigen Gleichungen der Tangenten im einen beliebigen Form sind die Punkte zu geben.*
$e_2:\ y+1=-4(x-7)$, oder in einer anderen Form $y=-4x+27$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**7 Punkte**	

c)



Die Darstellung der Graphen von *f* und *g*.	1 Punkt	*Höchstens 4 Punkte sind zu geben, wenn der Kandidat die Graphen falsch darstellt und mit den falschen Daten (auf einem falschen Intervall) rechnet. Die entsprechenden Punkte sind auch dann zu geben, wenn der Kandidat erst beide Integrale berechnen und nur dann die Ergebnisse subtrahiert, oder wenn er das Integral von g nicht bestimmt, sondern den Flächeninhalt von dem entsprechenden gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck berechnet und den aus dem Integral der Funktion f subtrahiert.*
Der Flächeninhalt des gefragten Gebietes: $T=\int_4^6 f(x)dx-\int_4^6 g(x)dx=\int_4^6 (f(x)-g(x))dx$.	1 Punkt	
Weil $f(x)-g(x)=-x^2+11x-28$, deshalb $T=\int_4^6(-x^2+11x-28)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+11\frac{x^2}{2}-28x\right]_4^6=$	2 Punkte	
$=\left(-\frac{6^3}{3}+11\cdot\frac{6^2}{2}-28\cdot 6\right)-\left(-\frac{4^3}{3}+11\cdot\frac{4^2}{2}-28\cdot 4\right)=\frac{10}{3}$.	2 Punkte	
Insgesamt:	**6 Punkte**	

7. a)		
Sei s_1 die Länge der Strecke zwischen Szeged und Cegléd in km, und s_2 die Entfernung zwischen Cegléd und Budapest in km, sowie v die ursprüngliche Durchschnittsgeschwindigkeit des Zuges in km/h. Die Fahrzeit des Zuges am Montag in Stunden: $\frac{s_1}{v}+\frac{3s_2}{v}$.	2 Punkte	*Als vollständige Lösung soll auch die Begründung ohne Formel betrachtet werden: Der 30 Minuten Unterschied von dem Fahrzeit ergab sich an der 19 lange Strecke, wo der Zug am Wochenende mit den doppelten Geschwindigkeit schneller fuhr als am Montag. Also ist die Geschwindigkeit die doppelte von 19/0,5, sowie 76 km/h.*
Die Fahrzeit des Zuges am Wochenende in Stunden: $\frac{s_1+19}{v}+\frac{3(s_2-19)}{v}$.	3 Punkte	
Die Bedingung für die Differenz der Fahrzeiten ergibt: $\left(\frac{s_1}{v}+\frac{3s_2}{v}\right)-\left(\frac{s_1+19}{v}+\frac{3(s_2-19)}{v}\right)=\frac{1}{2}$.	3Punkte	
Nach dem Lösen der Gleichung erhalten wir, dass die ursprüngliche Durchschnittsgeschwindigkeit des Zuges $v = 76$ km/h war.	2 Punkte	
Insgesamt:	**10 Punkte**	

b)

Art der Fahrkarte	Voller Preis	20% Ermäßigung	33% Ermäßigung	50% Ermäßigung	67,5% Ermäßigung	75% Ermäßigung	90% Ermäßigung	95% Ermäßigung	Frei
Anzahl der Fahrgäste	84	18	44	110	11	35	31	29	38
Wahrer Fahrkartenpreis (Ft)	**2000**	**1600**	**1340**	**1000**	**650**	**500**	**200**	**100**	**0**

Die Bestimmung der fehlenden Werte der Tabelle.	2 Punkte	*Falls unter den wahren Fahrkartenpreise höchstens 4 falsche Werte vorkommen, dann ist 1 Punkt zu geben. Wenn mehr als 4 falsche Werte vorkommen, dann kein Punkt.*

Durchschnittlicher Fahrkartenpreis in Ft:

$$\frac{84\cdot 2000+18\cdot 1600+44\cdot 1340+110\cdot 1000+11\cdot 650+35\cdot 500+31\cdot 200+29\cdot 100+38\cdot 0}{400}=$$

$=\frac{399510}{400}=998{,}775(\approx 999\ \text{Ft, bzw.} 1000\ \text{Ft})$.	2 Punkte	*Falls unter den wahren Fahrkartenpreise falsche Werte vorkommen, aber der Durchschnitt mit diesen Werten richtig berechnet ist, dann sind die 2 Punkte zu geben.*
Das ist ungefähr 50% des vollen Preises, also ist der durchschnittliche Fahrkartenpreis um 50% ermäßigt.	2 Punkte	*Die zwei Punkte sind auch dann zu geben, wenn der Kandidat anders gerundet hat, oder mit falschen Werten aber einen richtigen Lösungsweg gefolgt hat.*
Insgesamt:	**6 Punkte**	

8. a)

$\overline{a}$, $\overline{ab}$, $\overline{bba}$ sind genau dann die aufeinanderfolgenden Glieder einer arithmetischen Folge, wenn $\overline{bba}-\overline{ab}=\overline{ab}-\overline{a}$ gilt.	1 Punkt	
Mit Stellenwerten aufgeschrieben: $(110b+a)-(10a+b)=(10a+b)-a$,	1 Punkt	
Nach Umformungen ergibt $a=6b$.	1 Punkt	
a und b sind Ziffern im Dezimalsystem, also $a=6, b=1$.	2 Punkte	
So sind die drei Zahlen 6; 61; 116, und der Differenz ist 55.	1 Punkt	
Die Summe der ersten hundert Glieder: $S_{100}=\frac{100}{2}(2\cdot 6+99\cdot 55)=272850$.	1 Punkt	
Insgesamt:	**7 Punkte**	

b)		
Das erste Glied der geometrischen Folge ist a, der Quotient ist q. Falls q=1 ist, dann ist die Folge konstant, also alle Glieder sind gleich, deshalb sind die Summen auch gleich. Die gleichen Zahlen sind die aufeinanderfolgenden Glieder einer geometrischen Folge.	1 Punkt	
Falls $q \neq 1$, dann ist die Summe der ersten n Glieder: $S_n^{(1)} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$.	1 Punkt	
Die Summe der zweiten n Glieder: $S_n^{(2)} = aq^n \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$.	2 Punkte	
Die Summe der dritten n Glieder: $S_n^{(3)} = aq^{2n} \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$.	2 Punkte	
Sie Summen in dieser Reihenfolge bilden eine geometrische Folge, wenn $\left(S_n^{(2)}\right)^2 = S_n^{(1)} \cdot S_n^{(3)}$.	1 Punkt	
Das gilt aber, weil $S_n^{(1)} \cdot S_n^{(3)} = a^2 q^{2n} \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q-1}\right)^2 = \left(aq^n \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}\right)^2 = \left(S_n^{(2)}\right)^2$.	2 Punkte	
Insgesamt:	**9 Punkte**	*Die letzte 3 Punkte sind für beliebige richtige Begründungen zu geben.*

9. a)		
Wenn die erste zwei Zahlen a und b sind ($a < b$), dann ist die dritte $a + b$ und die vierte $2(a + b)$.	1 Punkt	
Nach dem Bedingung $2(a+b) \leq 40$, also $a + b \leq 20$.	1 Punkt	
Weil $a < b$, deshalb $a \leq 9$, also die kleinste Zahl kann höchstens die 9 sein	2 Punkte	
Insgesamt:	**4 Punkte**	
b)		
Es sind zwei mögliche Zahlenkombinationen:	2 Punkte	
9, 10, 19, 38;	1 Punkt	
9, 11, 20, 40.	1 Punkt	
Insgesamt:	**4 Punkte**	

c)		
Die Anzahl der Scheine, die nach der Regel von András ausfüllbar sind, kann nach dem kleinsten Wert bestimmt werden. Die erste Zahl: 1 2 3 4 5 6 7 8 9.	1 Punkt	
Anzahl der Scheine der Reihe nach: 18 16 14 12 10 8 6 4 2.	2 Punkte	
Die Anzahl der verschiedenen Scheine ist also: $2+4+\ldots+18=90$.	1 Punkt	
Die Anzahl der Möglichkeiten aus 40 Zahlen 4 auszuwählen ist: $\binom{40}{4}=91390$.	2 Punkte	
Die Wahrscheinlichkeit von einem Volltreffer ist: $P=\frac{90}{91390}\approx 9{,}85\cdot 10^{-4}$.	2 Punkte	
Insgesamt:	**8 Punkte**	