ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2006. május 9.

MATEMATIKA
FRANCIA NYELVEN
MATHEMATIQUES

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI
ÉRETTSÉGI VIZSGA
EPREUVE ECRITE
AU NIVEAU ELEVE

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ
GUIDE DE CORRECTION
ET D'EVALUATION

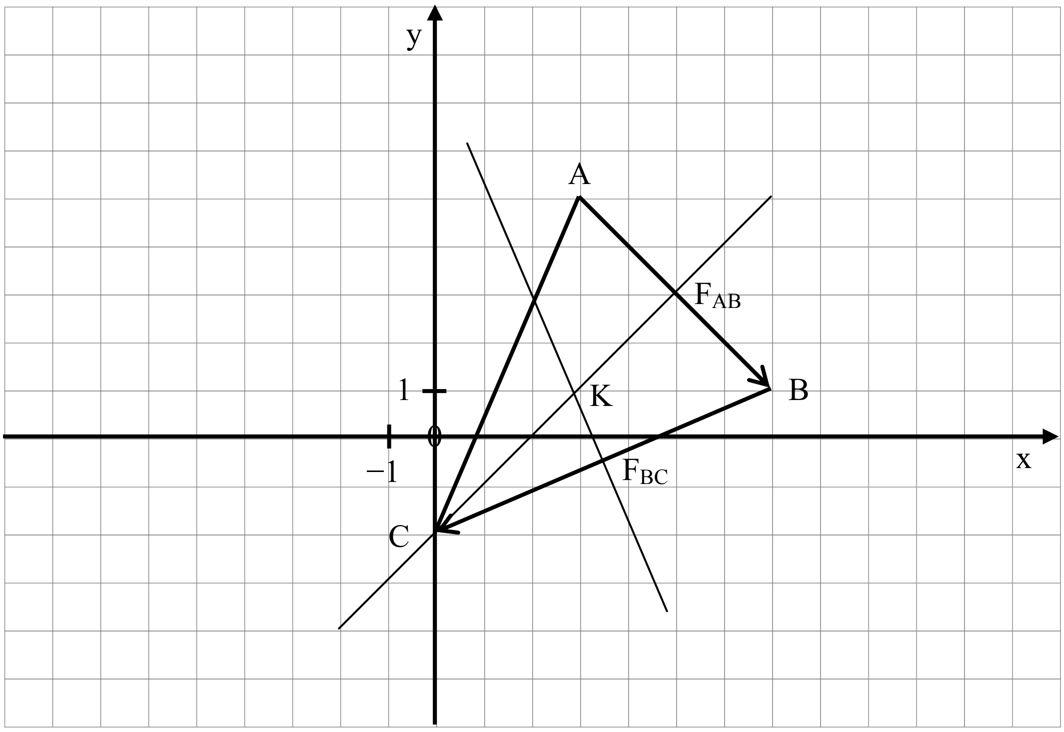
OKTATÁSI MINISZTÉRIUM
MINISTERE DE L'EDUCATION

Avis important

Prescriptions de forme:
• La copie doit être corrigée **au stylo de couleur différente** de celle utilisée par le candidat, et il faut indiquer les fautes, les lacunes etc. selon la pratique habituelle.
• Le nombre de points maximal apparaît dans le premier des rectangles gris se trouvant à côté des exercices, et **le nombre de points** donné par l'examinateur doit figurer dans **le rectangle** adjacent.
• **Pour une solution impeccable,** il suffit d'inscrire le nombre de points maximal dans les rectangles correspondants.
• Dans le cas d'une solution incomplète ou fausse, veuillez écrire **le nombre des points partiels** aussi sur la copie.
Attentes de contenu:
• A certains exercices, on a donné l'évaluation de plusieurs variantes de résolution. Si une **résolution en diffère,** recherchez-y les parties de résolution qui équivalent à certains détails du guide, et proposez des points en fonction.
• Les points proposés par le guide d'évaluation **peuvent être décomposés**. Toutefois, les points proposables doivent être entiers.
• Pour des raisonnements et résultats évidemment corrects on peut donner le nombre maximal des points même si la copie est **moins détaillée** que la proposition du guide d'évaluation.
• Si dans la solution on rencontre **une erreur de calcul** ou une inexactitude alors on enlève seulement les points de la partie où l'étudiant a commis l'erreur. S'il continue le calcul en utilisant le résultat partiel faux mais par un raisonnement juste et le problème à résoudre n'est pas essentiellement modifié alors il a droit aux points partiels ultérieurs.
• **En cas d'une erreur de principe,** dans une même unité conceptuelle (dans le guide, elles sont séparées de double ligne), on n'accorde aucun point même si certaines étapes mathématiques sont formellement correctes. Cependant si le candidat continue le calcul, à la base du faux résultat issu de l'erreur de principe, mais d'une manière juste dans l'unité conceptuelle ou la question partielle suivante, sans modifier essentiellement le problème à résoudre alors il a droit au point maximal de cette partie.
• Si une **unité de mesure** est mise entre parenthèses dans le guide alors même en l'absence de celle-ci, la solution est complète.
• A chaque exercice**, une seule solution peut être évaluée** sur les différentes tentatives (celle dont le nombre de points est le plus élevé).
• **On peut pas accorder de bonus** aux solutions (à savoir un nombre de points dépassant le maximum des points voulus pour l'exercice ou partie d'exercice donné.)
• **Un enlèvement de points ne doit pas se faire** pour des calculs partiels, étapes partielles qui sont faux mais ne sont pas effectivement utilisés.
• **La résolution de seulement 4 exercices sur les cinq proposés de la partie II. de l'épreuve écrite peuvent être évaluées.** Dans le carré correspondant, le candidat a -vraisemblablement- marqué le numéro de l'exercice dont il ne désire pas l'évaluation dans la somme totale des points. De sorte qu'il ne faut même pas corriger la solution éventuellement donnée à l'exercice marqué. Si le candidat ne marque pas d'une manière univoque le numéro de l'exercice dont l'évaluation n'est pas demandée alors c'est automatiquement le dernier exercice dans l'ordre proposé qu'il ne faudra pas évaluer.

I.

1. a)



La médiatrice du segment AB coupe l'axe des y en le troisième sommet C du triangle. Le milieu de AB: $F_{AB}(5;3)$.	1 point	
Un vecteur normal de la médiatrice de AB: $\overrightarrow{AB}(4;-4)$.	1 point	
L'équation de la médiatrice de AB: $x-y=2$.	1point	
Le sommet opposé à la base AB: $C(0;-2)$.	1 point	*Si le candidat lit les coordonnées du sommet C d'une représentation correcte sans effectuer des calculs, on lui accorde 2 points au plus sur les quatre points précédents.*
Total:	**4 points**	

b)

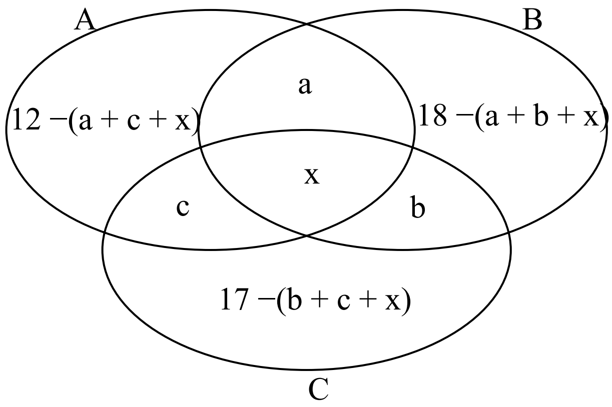
Le centre du cercle circonscrit est le point d'intersection de la médiatrice de AB et de celle d'un autre côté.	1 point	*Ce point doit être donné même si le raisonnement n'apparaît que du calcul.*
Le milieu du côté BC: $F_{BC}\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$.	1 point	
Un vecteur normal de la médiatrice de BC: $\overrightarrow{CB}(7;3)$.	1 point	

L'équation de la médiatrice de *BC*: $7x+3y=23$.	1 point	
La solution du système d'équations formé de l'équation de la médiatrice de *AB* et de l'équation de la médiatrice de *BC* est de $x=2{,}9$; $y=0{,}9$. Ainsi le centre du cercle circonscrit: $K(2{,}9;\ 0{,}9)$.	2 points	
Le carré du rayon du cercle circonscrit: $r^2=KC^2=2\cdot 2{,}9^2=16{,}82$.	1 point	
L'équation du cercle circonscrit: $(x-2{,}9)^2+(y-0{,}9)^2=16{,}82$.	1 point	
Total :	**8 points**	

2.		
La longueur de l'arête du cube rouge est *a*, celle de l'arête du cube bleu est *b*. L'aire du cube rouge est $6a^2$, celle du cube bleu est $6b^2$.	2 points	
D'après la condition donnée: $6a^2=\frac{3}{4}\cdot 6b^2$,	3 points	
d'où avec $a>0$ et $b>0$: $a=\frac{\sqrt{3}}{2}b$.	2 points	
Le volume du cube rouge exprimé par le volume du cube bleu: $a^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}b^3$.	3 points	
Puisque $\frac{3\sqrt{3}}{8}\approx 0{,}65$, le volume du cube rouge est à peu près les 65% du volume du cube bleu.	1 point	
Alors le volume du cube rouge est inférieur au volume du cube bleu à peut près de 35%.	1 point	
Total:	**12 points**	

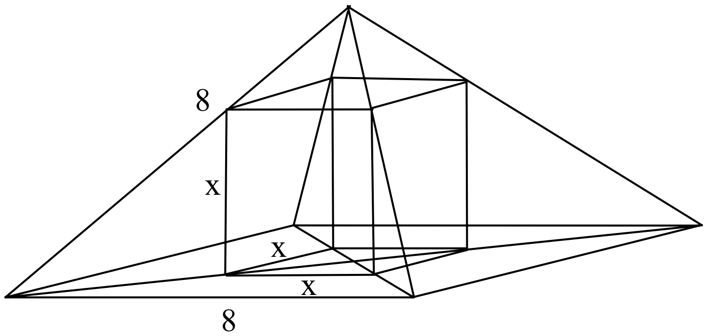
3. a)		
Si les racines de l'équation $x^2 - x + p = 0$ sont x_1, x_2 alors les racines de l'équation $x^2 + px - 1 = 0$ sont $x_1 + 1, x_2 + 1$.	2 points	*On donne ces points au candidat même s'il écrit les racines paramétriques par la formule de résolution.*
Dans le cas de toutes les deux équations, les formules de Viète concernant la somme des racines sont: $x_1 + x_2 = 1$ et $(x_1 + 1) + (x_2 + 1) = -p$	3 points	*Ces 3 points sont accordables pour un accouplement convenable des racines obtenues par la formule de résolution.*
Il en résulte que $p = -3$.	3 points	
Dans le cas de $p = -3$, toutes les deux équations ont des racines réelles.	1 point	*Ce point est accordable pour l'étude du discriminant aussi.*
Total:	**9 points**	
b)		
Le discriminant de l'équation $x^2 - x + 5 = 0$ est négatif, donc elle n'a pas de racines réelles.	2 points	
Les racines de l'équation $x^2 + 5x - 1 = 0$ sont: $x_1 = \dfrac{-5+\sqrt{29}}{2} (\approx 0{,}19)$; $x_2 = \dfrac{-5-\sqrt{29}}{2} (\approx -5{,}19)$.	2 points	
Total:	**4 points**	

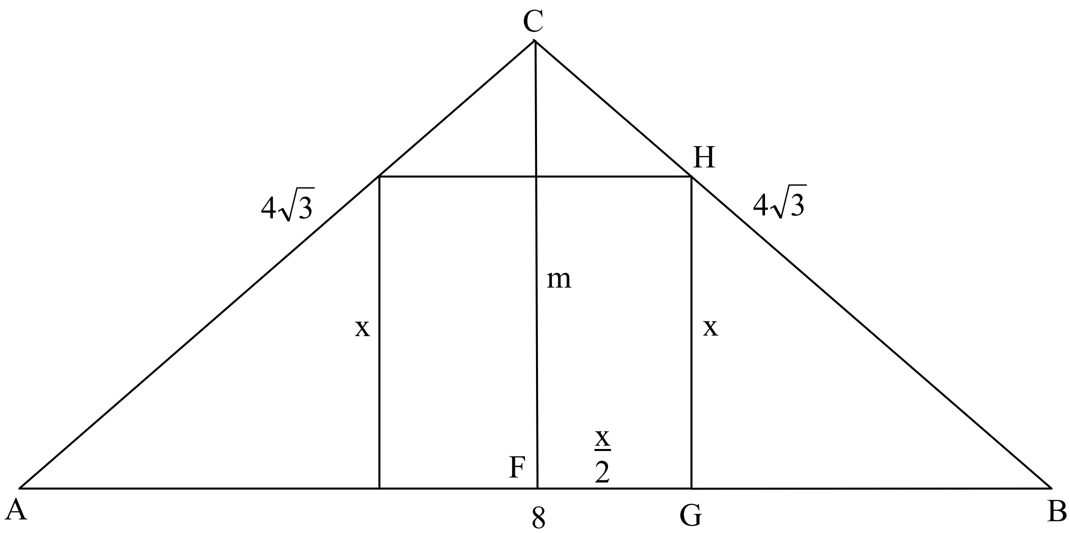
4. a) (Première variante de résolution)		
A, B et C désignent respectivement l'ensemble des savants publiant sur le rôle de l'ordinateur dans la recherche, l'éducation et la communication. Avec cette notation, les conditions du problème sont: $\lvert A\rvert = 12,\quad \lvert B\rvert = 18,\quad \lvert C\rvert = 17,\quad \lvert A \cup B \cup C\rvert = 30.$	1 point	
$\lvert A \cap B\rvert + \lvert B \cap C\rvert + \lvert C \cap A\rvert - 3 \cdot \lvert A \cap B \cap C\rvert = 7.$	2 points	
En appliquant la formule du crible logique: $30 = \lvert A \cup B \cup C\rvert =$ $= \lvert A\rvert + \lvert B\rvert + \lvert C\rvert - \lvert A \cap B\rvert - \lvert B \cap C\rvert - \lvert C \cap A\rvert + \lvert A \cap B \cap C\rvert =$ $= 12 + 18 + 17 - 7 - 2 \cdot \lvert A \cap B \cap C\rvert.$	3 points	
Il s'ensuit que $\lvert A \cap B \cap C\rvert = 5$.	2 points	
La probabilité en question est: $P = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}$.	2 points	
Total:	**10 points**	

a) (Deuxième variante de résolution)		
	3 points	
Selon les conditions données: (1) $a+b+c=7$.	1 point	
(2) $x+a+b+c+12-(a+c+x)+18-(a+b+x)+$ $+17-(b+c+x)=30$	2 points	
On réduit dans le premier membre de (2): $47-2x-(a+b+c)=30$.	1 point	
Après y avoir remplacé (1) et regroupé, on trouve que $x=5$.	1 point	
La probabilité en question est : $P=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$.	2 points	
Total:	**10 points**	
b)		
5 savants ont publié dans tous les trois sujets, 7 dans exactement 2 sujets, ainsi il y a 12 savants qui ont publié dans au moins deux sujets.	2 points	
Alors le nombre des spécialistes est $30-12=18$.	2 points	
Total:	**4 points**	

II.

5. a)





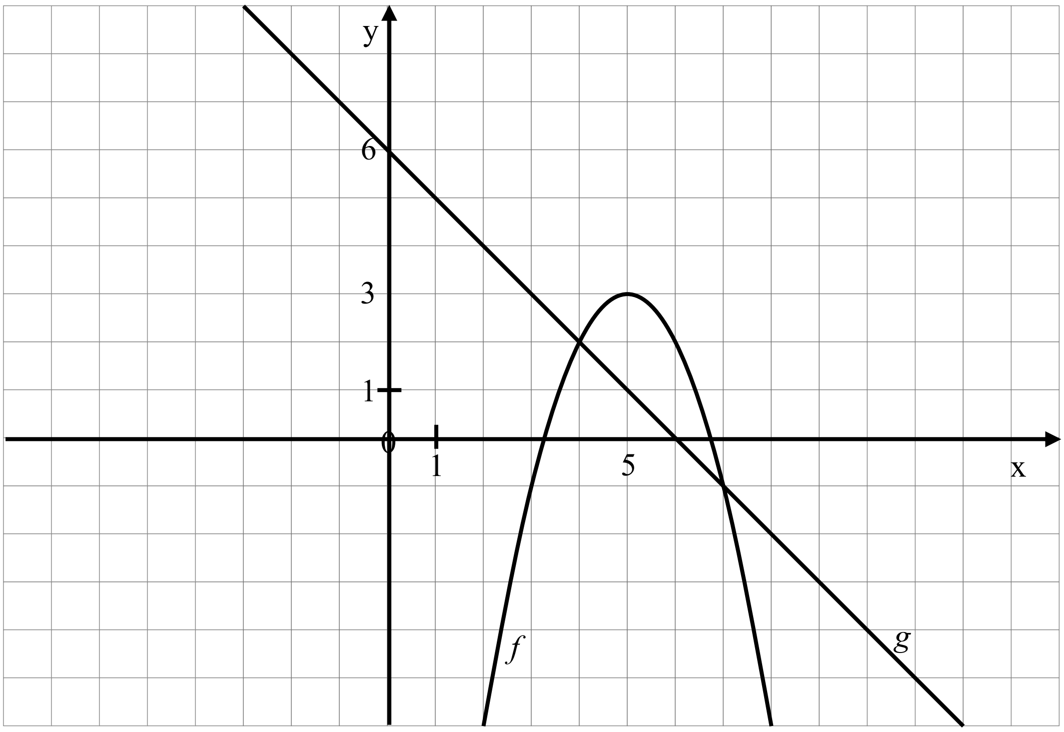
Pour la détermination de l'arête latérale de la pièce sous le toit, prenons la section plane de la pyramide passant par le sommet de la pyramide et par le milieu des deux arêtes de base opposées.	2 points	*Ces 2 points sont accordables pour un schéma reflétant d'avoir saisi les justes rapports dans l'espace.*
C'est un triangle isocèle dont la base est de 8 m et l'un des côtés égaux est de $4\sqrt{3}$ m.	1 point	
D'après le théorème de Pythagore, la hauteur relative à la base de ce triangle est de $m = 4\sqrt{2}$ (m).	1 point	
En utilisant les notations du schéma, les triangles rectangles *CFB* et *HGB* sont semblables,	1 point	
car l'angle aigu *FBC* est commun.	1 point	

Si x désigne la longueur de l'arête du cube (la longueur du côté du carré inscrit au triangle dans la section plane) alors à base de la similitude $\frac{x}{4-\frac{x}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$,	1 point	
d'où $x=\frac{8\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\approx 3{,}3\,(\mathrm{m})$.	1 point	
L'aire du planché de la pièce est de: $T=x^2=\frac{64}{3+2\sqrt{2}}\approx 11\,\mathrm{m}^2$.	1 point	
Total :	**9 points**	
b)		
Selon les précédents, la hauteur de la pyramide est de $m=4\sqrt{2}$.	1 point	
Alors le volume du toit (de la pyramide) est: $V_t=\frac{8^2\cdot 4\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{m}^3=\frac{256\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{m}^3\approx 120{,}68\,\mathrm{m}^3$.	2 points	*Il faut donner les points correspondants même en l'absence des valeurs approchées.*
Le volume du cube est: $V_k=\left(\frac{8\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^3\,\mathrm{m}^3=\frac{1024\sqrt{2}}{\left(2+\sqrt{2}\right)^3}\,\mathrm{m}^3\approx 36{,}38\,\mathrm{m}^3$.	2 points	
Le rapport des volumes est: $\frac{V_k}{V_t}=\frac{12}{\left(2+\sqrt{2}\right)^3}\approx 0{,}3015$.	1 point	
La pièce occupe approximativement les 30% de l'espace du toit.	1 point	
Total :	**7 points**	

6. a)		
L'équation à résoudre est: $-x^2+10x-22=-x+6$. En la transformant: $x^2-11x+28=0$.	1 point	
Les solutions sont: $x_1=4, x_2=7$.	2 points	
Total:	**3 points**	
b)		
La pente des tangentes passant par les points d'intersection est: $m_1=f'(x_1)$ et $m_2=f'(x_2)$, $f'(x)=-2x+10$.	1 point	
Ainsi $m_1=f'(4)=2$ et $m_2=f'(7)=-4$.	2 points	
Les points d'intersection des deux courbes sont: $M_1(4;2)$ et $M_2(7;-1)$.	2 points	
L'équation des deux tangentes sont: e_1 : $y-2=2(x-4)$, ou sous une autre forme $y=2x-6$,	1 point	*Il faut accorder les points correspondants pour n'importe laquelle*

$e_2 :\ y+1=-4(x-7)$, ou sous une autre forme $y=-4x+27$.	1 point	*des formes de l'équation des tangentes.*
Total:	**7 points**	

c)



La représentation graphique de *f* et *g*.	1 point	*4 points peuvent être donnés au maximum si le candidat représente mal les fonctions, et calcule avec les résultats erronés (sur un mauvais intervalle).* *Il faut accorder le nombre de points qui convient même si le candidat calcule les intégrales séparément et forme leur différence après, ou-bien s'il ne détermine pas l'intégrale de g mais à base du schéma il calcule*
L'aire de la figure plane en question est: $T=\int_4^6 f(x)dx-\int_4^6 g(x)dx=\int_4^6 (f(x)-g(x))dx$.	1 point	
Puisque $f(x)-g(x)=-x^2+11x-28$ alors $T=\int_4^6 \left(-x^2+11x-28\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+11\frac{x^2}{2}-28x\right]_4^6=$	2 points	
$=\left(-\frac{6^3}{3}+11\cdot\frac{6^2}{2}-28\cdot 6\right)-\left(-\frac{4^3}{3}+11\cdot\frac{4^2}{2}-28\cdot 4\right)=\frac{10}{3}$.	2 points	
Total:	**6 points**	

		l'aire du triangle rectangle isocèle qu'il soustrait de l'intégrale de f.

7. a)		
Soit s_1 la longueur de trajet en km entre Szeged et Cegléd, s_2 celle entre Cegléd et Budapest en km et v la vitesse moyenne initiale du train en km/h. La durée du trajet du train en heure lundi: $\frac{s_1}{v}+\frac{3s_2}{v}$.	2 points	*La justification concise, sans formule doit être aussi considérée comme une solution complète: La vitesse augmentée du double de la vitesse de fin de semaine a causé le décalage de 30 minutes par rapport à la durée du trajet sur le tronçon de 19 km. Par ainsi la vitesse du train est le double de 19/0,5 c'est à dire 76 km/h.*
La durée du trajet en heure en fin de semaine: $\frac{s_1+19}{v}+\frac{3(s_2-19)}{v}$.	3 points	
Selon la condition donnée pour la différence entre les deux durées de trajet: $\left(\frac{s_1}{v}+\frac{3s_2}{v}\right)-\left(\frac{s_1+19}{v}+\frac{3(s_2-19)}{v}\right)=\frac{1}{2}$.	3 points	
Après avoir résolu l'équation on obtient que la vitesse moyenne initiale du train est de 76 km/h.	2 points	
Total:	**10 points**	

b)

Type de billet	Tarif complet	Réduction de 20 %	Réduction de 33 %	Réduction de 50 %	Réduction de 67,5 %	Réduction de 75 %	Réduction de 90 %	Réduction de 95 %	Gratuit
Le nombre des passagers	84	18	44	110	11	35	31	29	38
Le prix réel du billet (Ft)	**2000**	**1600**	**1340**	**1000**	**650**	**500**	**200**	**100**	**0**

Le remplissage du tableau.	2 points	*Si parmi les prix réels de billet 4 au plus sont erronés, on peut accorder 1 point. S'il y en a plus que 4 alors pas de point accordable.*

Le prix moyen des billets en Ft est:

$$\frac{84\cdot 2000+18\cdot 1600+44\cdot 1340+110\cdot 1000+11\cdot 650+35\cdot 500+31\cdot 200+29\cdot 100+38\cdot 0}{400}=$$

$=\frac{399510}{400}=998{,}775(\approx 999\ \text{Ft, ou bien}\ 1000\ \text{Ft})$.	2 points	*Si parmi les prix réels de billet il y en a des erronés mais le principe de calcul de la moyenne est correct, on lui donne les 2 points.*

C'est approximativement les 50% du tarif plein alors la réduction du prix moyen des billets serait d'à peu près 50%.	2 points	*Il faut également donner les 2 points si le candidat calcule à base des données erronées mais le principe de calcul est correct, ou son résultat dérive d'une autre sorte d'approximation.*
Total:	**6 points**	
8. a)		
Les nombres $\overline{a}$, $\overline{ab}$, $\overline{bba}$ sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique dans le seul cas où $\overline{bba}-\overline{ab}=\overline{ab}-\overline{a}$.	1 point	
Avec les positions de chiffres: $(110b+a)-(10a+b)=(10a+b)-a$,	1 point	
d'où on trouve que $a=6b$.	1 point	
Puisque les chiffres *a* et *b* sont à base dix alors $a=6, b=1$.	2 points	
Donc les trois nombres sont 6; 61; 116, la raison est de 55.	1 point	
La somme des cent premiers termes est: $S_{100}=\frac{100}{2}(2\cdot 6+99\cdot 55)=272850$.	1 point	
Total:	**7 points**	
b)		
Le premier terme de la suite géométrique est *a*, sa raison est *q*. Si *q* = 1 alors la suite est stationnaire, les sommes correspondantes sont égales. Les trois nombres identiques sont les termes consécutifs d'une suite géométrique.	1 point	
Si $q\neq 1$ alors la somme des n premiers termes est: $S_n^{(1)}=a\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$.	1 point	
La somme des *n* deuxièmes termes est: $S_n^{(2)}=aq^n\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$.	2 points	
La somme des *n* troisièmes termes est: $S_n^{(3)}=aq^{2n}\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$.	2 point	
Ces sommes, dans cet ordre, sont les termes consécutifs d'une suite géométrique si $\left(S_n^{(2)}\right)^2=S_n^{(1)}\cdot S_n^{(3)}$.	1 point	

Ce qui est vrai parce que $S_n^{(1)} \cdot S_n^{(3)} = a^2 q^{2n} \cdot \left(\dfrac{q^n - 1}{q-1}\right)^2 = \left(aq^n \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1}\right)^2 = \left(S_n^{(2)}\right)^2.$	2 point	
Total:	**9 points**	*Les 3 derniers points sont accordables pour une quelconque justification correcte.*

9. a)		
Si les deux premiers nombres sont a et b $(a < b)$ alors le troisième nombre est $a + b$, le quatrième est $2(a+b)$.	1 point	
D'après la condition $2(a+b) \leq 40$ d'où $a+b \leq 20$.	1 point	
Puisque $a < b$, alors $a \leq 9$, donc le plus petit nombre peut être au maximum 9.	2 points	
Total:	**4 points**	
b)		
Il existe deux nombres quaternaires possibles:	2 points	
9, 10, 19, 38;	1 point	
9, 11, 20, 40.	1 point	
Total:	**4 points**	
c)		
On peut résumer le nombre des bulletins remplis selon la règle d'András en fonction du choix du premier nombre. Le premier nombre: 1 2 3 4 5 6 7 8 9.	1 point	
Le nombre respectif des bulletins: 18 16 14 12 10 8 6 4 2.	2 points	
Donc le nombre des bulletins différents est: $2+4+...+18=90$.	1 point	
Le nombre des nombres quaternaires choisis sur les 40 premiers nombres entiers positifs est: $\binom{40}{4} = 91390$.	2 points	
La probabilité de la cagnotte est: $P = \dfrac{90}{91390} \approx 9{,}85 \cdot 10^{-4}$.	2 points	
Total:	**8 points**	